* التدرج (الانحدار)

$$\vec{grad}\ \phi(x,y,z)$$

مقدار متجه ، مقدار سلمي

$$grad\ \phi(x,y,z) = \frac{\partial \phi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial \phi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial \phi}{\partial z}\vec{k}$$

---

* التفرق :

$$div\ \vec{A}$$

مقدار سلمي ، مقدار متجه

$$div\ \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

---

* الدوران

$$rot\ \vec{A} = \vec{B}$$

نعرف

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$$

$$rot\ \vec{A} = \vec{\nabla}\times\vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}$$

---

$$= i\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)_{B_x} + j\left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)_{B_y} + k\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)_{B_z}$$

$$rot\ \vec{A} = \vec{B} = B_x\vec{i} + B_y\vec{j} + B_z\vec{k}$$

---

* المؤثر اللابلاسي

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

---

* مفهوم جولان الحقل

الشغل $= F \cdot dl$

جولان الحقل $= \vec{A} \; dl$

حيث $\vec{A}$ هو الحقل.

---

* التفاضل التام

$$d\vec{l} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$$

$$d\phi = \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial \phi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial \phi}{\partial z}\vec{k}\right)(dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k})$$

$$d\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x}dx + \frac{\partial \phi}{\partial y}dy + \frac{\partial \phi}{\partial z}dz$$

---

* متجه السطح

هو متجه عمودية على السطح، قيمتها العددية هي مساحة السطح واتجاهها هي الكمية المعاكسة لدوران عقارب الساعة.

$$ds \,(ds_x, ds_y, ds_z)$$

$$ds_x = dy \cdot dz \;,\; ds_y = (dx \cdot dz) \;,\; ds_z = dx\,dy$$

---

* مفهوم تدفق الحقل الشعاعي:

هو كمية الحقل عبر المقطع الذي يعبره.

$$d\phi = \vec{A} \cdot \vec{ds}$$

انتهت المحاضرة ①

---

فيزياء رياضيات ②

* نظرية غاوس - أوستروغرادسكي: من تكامل سطحي ← تكامل حجمي

وهو ايجاد علاقة بين التكامل الثنائي والتكامل الثلاثي:

وهو تدفق الحقل الذي يجتاز سطح سيادي تعرف الحقل بالحجم.

$$\iint \vec{A} \cdot \vec{ds} = \iiint div\vec{A} \cdot d\tau$$

$$: ds\ (ds_x, ds_y, ds_z)$$

---

* نظرية ستوكس: من تكامل خطي ← تكامل سطحي.

$$\oint \vec{A} \cdot \vec{dl} = \iint rot\,\vec{A} \cdot \vec{ds}$$

---

* مبرهنة غرين:

نفرض لدينا تابعين سلميين $U(x,y,z)$ و $\phi(x,y,z)$

ولنفرض أنه لدينا شعاع $\vec{A}$ تعرف بأنها جداء أحد التابعين السلميين مضروب بتدرج الآخر

$$\vec{A} = U\nabla\phi \quad --- (1)$$

$$\vec{A} = \phi\nabla U \quad --- (2)$$

نثبت أن:

$$\int_S (\phi\nabla U - U\nabla\phi)\,ds = \int_\tau (\phi\nabla^2 U - U\nabla^2\phi)\,d\tau$$

②

من (1) لجيب

$$\nabla A = div A$$
$$\nabla \hat{A} = \nabla(U \nabla \phi)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}(U \nabla \phi) + \frac{\partial}{\partial y}(U \nabla \phi) + \frac{\partial}{\partial z}(U \nabla \phi)$$

$$\nabla A = \nabla(U \nabla \phi) + U \nabla^2 \phi$$

اعتمادا على دعوى غاوص استوغرادسكي،

$$\oint_s A \cdot ds = \int_\tau div A \, d\tau$$

$$\oint_s (U \nabla \phi) ds = \int_\tau (\nabla (U \nabla \phi) + U \nabla^2 \phi) d\tau \quad (*)$$

...الاولى

نبدل بين موضعي $U$ و $\phi$ في $A$

$$A = \phi \nabla U$$

$$\nabla A = \nabla U + \phi + \phi \nabla^2 U$$

اعتمادا على دعوى غاوص - أوستروغرادسكي

$$\oint_s (\phi \nabla U) ds = \int_\tau (\nabla U \nabla \phi + \phi \nabla^2 U) d\tau \quad (**)$$

نطرح (*) من (**)

$$\oint_s (\phi \nabla U - U \nabla \phi) ds = \int (\phi \nabla^2 U - U \nabla^2 \phi) d\tau$$

مبرهنة غرين الثانية و.هـ.م.